第 14 講　漸化式の応用

14　次の各問いに答えよ．

(1)　A 銀行の住宅ローンは，最初の 10 年間の金利が年利率 3 % で，残りの期間の金利が年利率 5 % であり，B 銀行の住宅ローンは，全期間の金利が年利率 4 % である．ある人が A 銀行と B 銀行からそれぞれ 1000 万円ずつを住宅ローンで借りて，1 年後から毎年 60 万円ずつ返済するとき，20 年後のそれぞれの残高を求めよ．

ただし，A 銀行と B 銀行の住宅ローンでは，ある年の残高は前年の残高に金利分 (＝残高×年利率) を加えて，返済分を引いたものである．また，$1.03^{10}=1.34$, $1.04^{10}=1.48$, $1.05^{10}=1.63$, $1.03^{20}=1.81$, $1.04^{20}=2.19$, $1.05^{20}=2.65$ として計算せよ．

(2)　関数 $f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は

$$f_1(x)=4x^2+1$$

$$f_n(x)=3x^2\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt+3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で，帰納的に定義されている．この $f_n(x)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　漸化式の応用

14　ある会社が，プロ野球のハチロー選手に対して，公式戦で二塁打を1本打つとそのたびに10万円の賞金を出すこととした．そこでハチロー選手は

(Ⅰ)　1本目については賞金の40％

(Ⅱ)　n本目（$n \geqq 2$）については，$n-1$本目までの賞金総額のうち手元に残った金額とn本目の賞金10万円との合計の40％

を慈善事業への寄付金にあてることとした．ハチロー選手は手元に残った賞金には手をつけないものとする．寄付金の合計額がはじめて100万円を超えるときの二塁打の総本数を求めよ．

【選択肢】

㋐　10本　　㋑　11本　　㋒　12本

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　漸化式の応用

14　次の各問いに答えよ．

(1)　A 銀行の住宅ローンは，最初の 10 年間の金利が年利率 3％で，残りの期間の金利が年利率 5％であり，B 銀行の住宅ローンは，全期間の金利が年利率 4％である．ある人が A 銀行と B 銀行からそれぞれ 1000 万円ずつを住宅ローンで借りて，1 年後から毎年 60 万円ずつ返済するとき，20 年後のそれぞれの残高を求めよ．

　ただし，A 銀行と B 銀行の住宅ローンでは，ある年の残高は前年の残高に金利分（＝残高×年利率）を加えて，返済分を引いたものである．また，$1.03^{10}=1.34$，$1.04^{10}=1.48$，$1.05^{10}=1.63$，$1.03^{20}=1.81$，$1.04^{20}=2.19$，$1.05^{20}=2.65$ として計算せよ．

(2)　関数 $f_n(x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は

$$f_1(x)=4x^2+1$$

$$f_n(x)=3x^2\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt+3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で，帰納的に定義されている．この $f_n(x)$ を求めよ．

【答】 (1) A 銀行の残高：319.8 万円，B 銀行の残高：405 万円

(2) $f_n(x)=2^{n+1}x^2+5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$

【解答】

(1)　金利が年利率 r％の場合で a_0 万円借りたときの n 年後の残高を a_n 万円とすると

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{r}{100}\right)a_n-60 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

①は $a_{n+1}-\dfrac{6000}{r}=\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\left(a_n-\dfrac{6000}{r}\right)$ と変形できるので，これより

$$a_n=\frac{6000}{r}+\left(a_0-\frac{6000}{r}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

を得る．

　A 銀行の最初の 10 年間は $a_0=1000$，$r=3$ とすることにより

$$\begin{aligned} a_{10}&=\frac{6000}{3}+\left(1000-\frac{6000}{3}\right)\times 1.03^{10}\\ &=2000-1000\times 1.03^{10}\\ &=2000-1000\times 1.34\\ &=660\ (\text{万円}) \end{aligned}$$

となる．さらに $a_0=660$，$r=5$ とすることで

$$\begin{aligned} a_{10}&=\frac{6000}{5}+\left(660-\frac{6000}{5}\right)\times 1.05^{10}\\ &=1200-540\times 1.05^{10}\\ &=1200-540\times 1.63\\ &=\mathbf{319.8}\ (\text{万円}) \end{aligned}$$

これが A 銀行での 20 年後の残高である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

B銀行の住宅ローンの場合，$a_0=1000$，$r=4$ とすると

$$a_{20}=\frac{6000}{4}+\left(1000-\frac{6000}{4}\right)\times 1.04^{20}$$
$$=1500-500\times 1.04^{20}$$
$$=1500-500\times 2.19$$
$$=\mathbf{405}\ \textbf{（万円）}$$

これがB銀行での20年後の残高である．

(2)　$3\int_0^1 tf'_{n-1}(t)dt$，$3\int_0^1 f_{n-1}(t)dt$ は定数であるので

$$f_n(x)=a_nx^2+b_n,\ a_1=4,\ b_1=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおくことができる．このとき $f'_n(x)=2a_nx$ より

$$f_{n+1}(x)=3x^2\int_0^1 t\cdot 2a_ntdt+3\int_0^1(a_nt^2+b_n)dt$$
$$=2a_nx^2\Big[t^3\Big]_0^1+\Big[a_nt^3+3b_nt\Big]_0^1$$
$$=2a_nx^2+a_n+3b_n$$

よって

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=a_n+3b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①と $a_1=4$ より $a_n=2^{n+1}$

このとき②より

$$b_{n+1}=2^{n+1}+3b_n$$

これを変形して

$$b_{n+1}+2^{n+2}=3(b_n+2^{n+1})$$
$$\therefore\quad b_n+2^{n+1}=(b_1+2^2)\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore\quad b_n=5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f_n(x)=2^{n+1}x^2+5\cdot 3^{n-1}-2^{n+1}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　漸化式の応用

14　ある会社が，プロ野球のハチロー選手に対して，公式戦で二塁打を 1 本打つとそのたびに 10 万円の賞金を出すこととした．そこでハチロー選手は

(Ⅰ)　1 本目については賞金の 40 ％

(Ⅱ)　n 本目 $(n\geqq 2)$ については，$n-1$ 本目までの賞金総額のうち手元に残った金額と n 本目の賞金 10 万円との合計の 40 ％

を慈善事業への寄付金にあてることとした．ハチロー選手は手元に残った賞金には手をつけないものとする．寄付金の合計額がはじめて 100 万円を超えるときの二塁打の総本数を求めよ．

【選択肢】

㋐　10 本　　㋑　11 本　　㋒　12 本

【答】　㋒

【解答】

n 本目までの寄付金の合計額を a_n 万円とする．$a_1=10\times 0.4=4$ である．

$n-1$ 本目までの賞金総額は

$$10(n-1)\quad 万円$$

であるので，$n-1$ 本目に手元に残った金額は

$$10(n-1)-a_{n-1}\quad 万円$$

よって

$$a_n=\{10(n-1)-a_{n-1}+10\}\times 0.4+a_{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{3}{5}a_{n-1}+4n$$

この式は

$$a_n-10n+15=\frac{3}{5}\{a_{n-1}-10(n-1)+15\}$$

と変形できるので

$$a_n-10n+15=(a_1-10\times 1+15)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=9\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+10n-15$$

ここで，$9\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\leqq 9$ より，寄付金の合計額が 100 万円を超えるためには

$$10n-15>91\qquad\therefore\quad n\geqq 11$$

が必要で，このとき

$$9\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\leqq 9\left(\frac{3}{5}\right)^{11-1}$$

$$<9\left(\frac{3}{5}\right)^{5}=\frac{2187}{3125}<1$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$a_n > 100$ となるとき

$$10n - 15 \geqq 100$$

$$\therefore \quad n \geqq 11.5$$

ゆえに，求める総本数は **12 本**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。